5.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ

ΘΕΩΡΙΑ

1.

Ορισμός

Μια ακολουθία λέγεται **αριθμητική πρόοδος ,** αν και μόνο αν κάθε όρος της προκύπτει από τον προηγούμενο του με πρόσθεση του ίδιου πάντοτε αριθμού.

2.

Μαθηματική έκφραση του ορισμού

α_ν , $\nu \in \mathbb{N}^*$ αριθμητική πρόοδος $\Leftrightarrow$ $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + \omega$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$

$\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = \omega$

3.

Τύπος του ν-οστού όρου : $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$

4.

Συνθήκη του αριθμητικού μέσου

Οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου αν και μόνο αν $\beta = \dfrac{\alpha + \gamma}{2}$

Ο β λέγεται **αριθμητικός μέσος** των α και γ

5.

Άθροισμα ν διαδοχικών όρων

$S_\nu = \dfrac{(\alpha_1 + \alpha_\nu)\nu}{2}$ ή $S_\nu = \dfrac{[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]\nu}{2}$, για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$

ΣΧΟΛΙΑ – ΜΕΘΟΔΟΙ

1.
Πότε θεωρείται γνωστή μια αρ. πρόοδος
Όταν γνωρίζουμε τον όρο α_1 και τη διαφορά ω.

2.
Η διπλή σημασία του συμβόλου α_ν
Συμβολίζει την αρ.πρόοδο α_ν ή το ν-οστό όρο. Εξαρτάται από τα συμφραζόμενα.

3.
Παρατήρηση.

Καθένας από τους τύπους $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ και $S_\nu = \dfrac{[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega]\nu}{2}$

περιέχει τέσσερις μεταβλητές.

Αν γνωρίζουμε τις τρεις, μπορούμε να βρίσκουμε την τέταρτη λύνοντας την εξίσωση.

4.
Μέθοδος
Μετατρέπουμε τις υποθέσεις του προβλήματος σε εξισώσεις και λύνουμε το σύστημα

5.
Μέθοδος
α) Για άρτιο πλήθος όρων, θεωρούμε τους $\ldots x-3\omega,\quad x-\omega,\quad x+\omega,\quad x+3\omega\,..$
Εδώ η διαφορά της προόδου είναι 2ω
β) Για περιττό πλήθος όρων, θεωρούμε τους $x-2\omega,\quad x-\omega,\quad x,\quad x+\omega,\quad x+3\omega$
Εδώ η διαφορά της προόδου είναι ω

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1.

Σε μία αριθμητική πρόοδο το άθροισμα των ν πρώτων όρων είναι A, το άθροισμα των 2ν πρώτων όρων είναι B και των 3ν πρώτων όρων είναι Γ. Δείξτε ότι
$3A - 3B + \Gamma = 0$

Προτεινόμενη λύση

Έχουμε $S_\nu = A$, $S_{2\nu} = B$ και $S_{3\nu} = \Gamma$

$3A - 3B + \Gamma = 3S_\nu - 3S_{2\nu} + S_{3\nu}$

$$= 3\frac{[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]\nu}{2} - 3\frac{[2\alpha_1 + (2\nu - 1)\omega]2\nu}{2} + \frac{[2\alpha_1 + (3\nu - 1)\omega]3\nu}{2}$$

$$= \frac{3\nu}{2}\left\{[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega] - [2\alpha_1 + (2\nu - 1)\omega]\cdot 2 + [2\alpha_1 + (3\nu - 1)\omega]\right\}$$

$$= \frac{3\nu}{2}\left\{2\alpha_1 + \nu\omega - \omega - 4\alpha_1 - 4\nu\omega + 2\omega + 2\alpha_1 + 3\nu\omega - \omega\right\} = \frac{3\nu}{2}\cdot 0 = 0$$

2.

Αν οι αριθμοί $\frac{1}{\alpha}, \quad \frac{1}{\beta}, \quad \frac{1}{\gamma}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου, δείξτε ότι

i) $\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma} = \frac{\alpha}{\gamma}$

ii) Οι αριθμοί $\alpha\beta + \alpha\gamma, \quad \beta\gamma + \alpha\beta, \quad \alpha\gamma + \beta\gamma$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου

Προτεινόμενη λύση

i)

Οι $\frac{1}{\alpha}, \quad \frac{1}{\beta}, \quad \frac{1}{\gamma}$ αποτελούν αριθμητική πρόοδο $\Rightarrow$

$$2\cdot\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\gamma}$$

$$2\alpha\gamma = \beta\gamma + \alpha\beta$$

$$2\alpha\gamma = \beta(\gamma + \alpha)$$

$$\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma} \quad \textbf{(1)}$$

Απαλλασσόμαστε από τον α ή τον β ή τον γ

$$\frac{\alpha-\beta}{\beta-\gamma} \overset{(1)}{=} \frac{\alpha - \frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}}{\frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma} - \gamma} = \frac{\alpha^2 - \alpha\gamma}{\alpha\gamma - \gamma^2} = \frac{\alpha(\alpha-\gamma)}{\gamma(\alpha-\gamma)} = \frac{\alpha}{\gamma}$$

ii)

$\alpha\beta + \alpha\gamma, \quad \beta\gamma + \alpha\beta, \quad \alpha\gamma + \gamma\beta$ αριθμητική πρόοδος $\Leftrightarrow$

$$2(\beta\gamma + \alpha\beta) = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\gamma + \gamma\beta$$

$$2\beta\gamma + 2\alpha\beta = \alpha\beta + 2\alpha\gamma + \gamma\beta$$

$$\beta\gamma + \alpha\beta = 2\alpha\gamma$$

$$\beta(\gamma + \alpha) = 2\alpha\gamma$$

$$\beta = \frac{2\alpha\gamma}{\alpha+\gamma}$$ που ισχύει από την (1) .

3.

Αν οι θετικοί αριθμοί α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου να δείξετε ότι το ίδιο συμβαίνει και για τους αριθμούς

$$\frac{1}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}}\ ,\quad \frac{1}{\sqrt{\gamma}+\sqrt{\alpha}}\ ,\quad \frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$$

Προτεινόμενη λύση

Αφού οι α , β , γ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου $\Leftrightarrow$

$2\beta = \alpha + \gamma$ και $\beta - \alpha = \gamma - \beta = \omega$

Για να ισχύει το ζητούμενο αρκεί

$$\frac{2}{\sqrt{\gamma}+\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma}} + \frac{1}{\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}}$$

$$\frac{2(\sqrt{\gamma}-\sqrt{\alpha})}{(\sqrt{\gamma}+\sqrt{\alpha})(\sqrt{\gamma}-\sqrt{\alpha})} = \frac{\sqrt{\gamma}-\sqrt{\beta}}{(\sqrt{\beta}+\sqrt{\gamma})(\sqrt{\gamma}-\sqrt{\beta})} + \frac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})(\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha})}$$

$$\frac{2(\sqrt{\gamma}-\sqrt{\alpha})}{\gamma-\alpha} = \frac{\sqrt{\gamma}-\sqrt{\beta}}{\gamma-\beta} + \frac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{\beta-\alpha}$$

$$\frac{2(\sqrt{\gamma}-\sqrt{\alpha})}{2\omega} = \frac{\sqrt{\gamma}-\sqrt{\beta}}{\omega} + \frac{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}{\omega}$$

$\sqrt{\gamma}-\sqrt{\alpha} = \sqrt{\gamma}-\sqrt{\beta}+\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}$ η οποία είναι προφανής

4.

Αν οι αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ αποτελούν αριθμητική πρόοδο, δείξτε ότι το ίδιο συμβαίνει και για τους αριθμούς $\frac{1}{\beta\gamma\delta}$, $\frac{1}{\gamma\delta\alpha}$, $\frac{1}{\delta\alpha\beta}$, $\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$

Προτεινόμενη λύση

Η υπόθεση δίνει $2\beta = \alpha + \gamma$ και $2\gamma = \beta + \delta$

Για να ισχύει το ζητούμενο αρκεί $\frac{2}{\gamma\delta\alpha} = \frac{1}{\beta\gamma\delta} + \frac{1}{\delta\alpha\beta}$ και $\frac{2}{\delta\alpha\beta} = \frac{1}{\gamma\delta\alpha} + \frac{1}{\alpha\beta\gamma}$

(απαλοιφή παρανομαστών) $2\beta = \alpha + \gamma$ και $2\gamma = \beta + \delta$ που ισχύουν

5.

Σε μια ακολουθία (α_ν), για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ ισχύει $\alpha_\nu = 4 - 5\nu$. Να δείξτε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος.

Προτεινόμενη λύση

Για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ είναι $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 4 - 5(\nu + 1) - 4 + 5\nu = -5$

Άρα η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος.

6.

Σε μια αριθμητική πρόοδο, το άθροισμα των ν πρώτων όρων ισούται με $3\nu^2 + \nu$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$. Να βρεθεί η πρόοδος.

Αναζητάμε τον α_1 και τη διαφορά ω

Προτεινόμενη λύση

Ισχύει $S_\nu = \dfrac{[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]\nu}{2}$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$

Δίνεται $S_\nu = 3\nu^2 + \nu$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$

Άρα $\dfrac{[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]\nu}{2} = 3\nu^2 + \nu$ για κάθε $\nu \in \mathbb{N}^*$ $\Rightarrow$

$2\alpha_1\nu + (\nu - 1)\omega\nu = 6\nu^2 + 2\nu$

$2\alpha_1\nu + \nu^2\omega - \omega\nu = 6\nu^2 + 2\nu$

$\omega\nu^2 + (2\alpha_1 - \omega)\nu = 6\nu^2 + 2\nu$

Θυμήσου την ισότητα των πολυωνύμων

$\omega = 6$ και $2\alpha_1 - \omega = 2$

$\omega = 6$ και $2\alpha_1 - 6 = 2$

$\omega = 6$ και $2\alpha_1 = 8$

$\omega = 6$ και $\alpha_1 = 4$

7.

Το άθροισμα των ν πρώτων όρων μιας ακολουθίας είναι $3\nu^2+\nu$ για κάθε $\nu\in\mathbb{N}^*$.

i) Να βρείτε το $S_{\nu-1}$

ii) Να βρείτε τον ν-οστο όρο

iii) Δείξτε ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος

Προτεινόμενη λύση

i)

$S_{\nu-1} = 3(\nu-1)^2+(\nu-1) = 3\nu^2-5\nu+2$

ii)

$S_\nu = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_{\nu-1}+\alpha_\nu \quad \Rightarrow \quad S_\nu = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\ldots+\alpha_{\nu-1})+\alpha_\nu$

$S_\nu = S_{\nu-1}+\alpha_\nu$

$\alpha_\nu = S_\nu - S_{\nu-1}$

$\alpha_\nu = (3\nu^2+\nu) - (3\nu^2-5\nu+2)$

$\alpha_\nu = 6\nu-2$

iii)

$\alpha_{\nu+1}-\alpha_\nu = 6(\nu+1)-2-6\nu+2 = 6$ οπότε η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με $\omega = 6$ και $\alpha_1 = 6\cdot 1-2 = 4$

8.

Να βρείτε τις τιμές των α και β ώστε οι αριθμοί $\alpha\beta-\frac{1}{\alpha\beta}$, $\beta-\frac{1}{\beta}$, $\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}$ με την σειρά που δίνονται να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

Προτεινόμενη λύση

Πρέπει και αρκεί $2\left(\beta-\frac{1}{\beta}\right) = \alpha\beta-\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}$

$2\frac{\beta^2-1}{\beta} = \alpha\beta-\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\beta}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta}$

$2\alpha\beta^2-2\alpha = \alpha^2\beta^2-1+\beta^2-\alpha^2$

$\alpha^2\beta^2-1+\beta^2-\alpha^2-2\alpha\beta^2+2\alpha = 0$

$\beta^2(\alpha^2+1-2\alpha) - (\alpha^2+1-2\alpha) = 0$

$(\alpha^2+1-2\alpha)(\beta^2-1) = 0$

$(\alpha-1)^2(\beta^2-1) = 0$

$\alpha = 1$ ή $\beta = 1$ ή $\beta = -1$

9.

Μεταξύ των αριθμών 1 και μ^2 να παρεμβάλετε μ το πλήθος αριθμούς, έτσι ώστε να προκύπτει αριθμητική πρόοδος.

Προτεινόμενη λύση

Έστω $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\mu$ οι παρεμβαλλόμενοι αριθμοί.

Τότε η ακολουθία $1, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_\mu, \mu^2$ είναι αριθμητική πρόοδος με

$\alpha_1 = 1$, πλήθος όρων $\mu + 2$ και $\alpha_{\mu+2} = \mu^2$.

Αν ω είναι η διαφορά της προόδου, τότε $\alpha_{\mu+2} = \alpha_1 + (\mu + 2 - 1)\omega$

$$\mu^2 = 1 + (\mu + 1)\omega$$

$$\omega = \frac{\mu^2 - 1}{\mu + 1}$$

$$\omega = \frac{(\mu - 1)(\mu + 1)}{\mu + 1}$$

$$\omega = \mu - 1$$

Άρα $x_1 = 1 + \omega = 1 + \mu - 1 = \mu$,

$x_2 = x_1 + \omega = \mu + \mu - 1 = 2\mu - 1$

……………………………..

$x_\mu = x_1 + (\mu - 1)\omega = \mu + (\mu - 1)(\mu - 1) = \mu + \mu^2 - 2\mu + 1 = \mu^2 - \mu + 1$

10.

Αριθμητικής προόδου δίνεται ότι $\alpha_9 = 15$ και $S_{12} = 165$. Να βρείτε το άθροισμα

$$\alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \ldots + \alpha_{30}$$

Προτεινόμενη λύση

$$\begin{cases} \alpha_9 = 15 \\ S_{12} = 165 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 + 8\omega = 15 \\ \dfrac{[2\alpha_1 + 11\omega]12}{2} = 165 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 15 - 8\omega \\ (2\alpha_1 + 11\omega)6 = 165 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 15 - 8\omega \\ 12\alpha_1 + 66\omega = 165 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 15 - 8\omega \\ 12(15 - 8\omega) + 66\omega = 165 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 15 - 8\omega \\ 180 - 96\omega + 66\omega = 165 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 15 - 8\omega \\ -30\omega = -15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 15 - 8\omega \\ \omega = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 15 - 8 \cdot \dfrac{1}{2} \\ \omega = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 11 \\ \omega = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$\alpha_2 = 11 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{23}{2}$, $\alpha_4 = 11 + 3 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{25}{2}$, $\alpha_6 = 11 + 5 \cdot \dfrac{1}{2} = \dfrac{27}{2}$ κλπ

Το ζητούμενο άθροισμα είναι άθροισμα των όρων αριθμητικής προόδου με

πρώτο όρο $\alpha_2 = \dfrac{23}{2}$, διαφορά $\omega = 1$ και πλήθος όρων 15.

Άρα $S = \dfrac{[2 \cdot \frac{23}{2} + 14 \cdot 1]15}{2} = \dfrac{[23 + 14]15}{2} = \dfrac{555}{2}$

11.

Σε μία περιοχή το μέγιστο ύψος των οικοδομών είναι 30μ και το ελάχιστο ύψος κάθε ορόφου 2,90μ . Πόσους το πολύ ορόφους μπορούμε να φτιάξουμε αν θέλουμε ο 1ος όροφος να είναι υπερυψωμένος κατά 1μ από το έδαφος ;

Προτεινόμενη λύση

Είναι φανερό ότι το καθαρό ύψος της οικοδομής θα είναι το πολύ 29 μέτρα .

Επομένως ο τελευταίος όροφος θα πρέπει να βρίσκεται σε ύψος μικρότερο ή ίσο των 29 μέτρων

Το ύψος κάθε ορόφου από το έδαφος δίνεται από τον αντίστοιχο όρο της αριθμητικής προόδου με πρώτον όρο $\alpha_1 = 2{,}90$ και διαφορά $\omega = 2{,}90$.

Αν ν είναι το πλήθος των ορόφων που μπορούμε να χτίσουμε τότε θα πρέπει

$$\alpha_\nu \leq 29 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha_1 + (\nu-1)\omega \leq 29$$

$$2{,}90 + (\nu-1)\cdot 2{,}90 \leq 29$$

$$1 + (\nu-1) \leq 10 \quad \Leftrightarrow \quad \nu \leq 10$$

Άρα το πολύ 10 ορόφους μπορούμε να χτίσουμε

12.

Να δείξετε ότι αν τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου τριγώνου είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου τότε είναι ανάλογα των αριθμών 3 , 4 και 5.

Προτεινόμενη λύση

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με υποτείνουσα $\alpha = ΒΓ$ και $\beta < \gamma$.

$\beta,\ \gamma,\ \alpha$ διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με διαφορά $\omega \quad \Rightarrow$

$$\gamma = \beta + \omega \quad \text{και} \quad \alpha = \gamma + \omega \qquad \textbf{(1)}$$

Πυθαγόρειο $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} (\gamma+\omega)^2 = (\gamma-\omega)^2 + \gamma^2$

$$\gamma^2 + 2\gamma\omega + \omega^2 = \gamma^2 - 2\gamma\omega + \omega^2 + \gamma^2$$

$$\gamma^2 - 4\gamma\omega = 0$$

$$\gamma(\gamma - 4\omega) = 0$$

$$\gamma - 4\omega = 0 \quad \text{αφού} \quad \gamma > 0$$

$$\gamma = 4\omega \quad \text{οπότε και} \quad \frac{\gamma}{4} = \omega \qquad \textbf{(2)}$$

$$(1) \Rightarrow \quad 4\omega = \beta + \omega \quad \text{και} \quad \alpha = 4\omega + \omega$$

$$\beta = 3\omega \quad \text{και} \quad \alpha = 5\omega$$

$$\frac{\beta}{3} = \omega \quad \text{και} \quad \frac{\alpha}{5} = \omega \qquad \textbf{(3)}$$

Από τις (2) και (3) $\Rightarrow \quad \dfrac{\beta}{3} = \dfrac{\gamma}{4} = \dfrac{\alpha}{5}$

13.

Τρεις αριθμοί είναι ανάλογοι των 2 , 5 και 7 Αν ο $2^{ος}$ ελαττωθεί κατά 7 ,οι τρείς αριθμοί γίνονται διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου .Να βρείτε τους αριθμούς.

Προτεινόμενη λύση

Οι υποθέσεις γίνονται $\frac{x}{2}=\frac{y}{5}=\frac{z}{7}=\mu$ και $x,\ y-7,\ z$ αρ. πρόοδος $\Rightarrow$

$$x=2\mu \quad \text{και} \quad y=5\mu \quad \text{και} \quad z=7\mu \quad \mathbf{(1)} \quad \text{και} \quad 2(y-7)=x+z \quad \mathbf{(2)}$$

(2) $\overset{(1)}{\Rightarrow}$ $2(5\mu-7)=2\mu+7\mu$

$10\mu-14=9\mu$

$\mu=14$

(1) $\Rightarrow$ $x=28,\quad y=70,\quad z=98$

14.

Αν οι αριθμοί α , β , 5 είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και το πολυώνυμο $P(x)=\alpha^3x^3-(\alpha-1)x^2-(2\beta+1)x+3\alpha+3$ έχει μία ρίζα το 1 να βρείτε τις άλλες ρίζες αυτού.

Προτεινόμενη λύση

Θα είναι $2\beta=\alpha+5$ **(1)** και $P(1)=0$

$\alpha^3-(\alpha-1)-(2\beta+1)+3\alpha+3=0$

$\alpha^3-2\beta+2\alpha+3=0$ λόγω της (1)

$\alpha^3-(\alpha+5)+2\alpha+3=0$

$\alpha^3+\alpha-2=0$ (Horner για $\alpha=1$)

$(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+2)=0$ $(\Delta<0)$

$\alpha-1=0$

$\alpha=1$

(1) $\Rightarrow$ $2\beta=1+5$ $\Rightarrow$ $\beta=3$

Το πολυώνυμο γίνεται $P(x)=x^3-7x+6$ (Horner για $x=1$)

$P(x)=(x-1)(x^2+x-6)$

Ρίζες : $P(x)=0$

$(x-1)(x^2+x-6)=0$

$x-1=0$ ή $x^2+x-6=0$

$x=1$ ή $x=2$ ή $x=-3$

15.

Να λυθεί η εξίσωση $(x + 2) + (x + 5) + (x + 8) + \ldots + (x + 29) = 165$

Προτεινόμενη λύση

Το πλήθος των παρενθέσεων είναι όσο και το πλήθος των όρων της αριθμητικής προόδου 2, 5, 8, . . . , η οποία έχει $\alpha_1 = 2$, $\omega = 3$ και $\alpha_\nu = 29$

Αλλά $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega \quad \Leftrightarrow$

$29 = 2 + (\nu - 1)\cdot 3$

$29 = 2 + 3\nu - 3$

$30 = 3\nu \quad \Leftrightarrow \quad \nu = 10.$ Άρα οι παρενθέσεις είναι 10

Το άθροισμα $2 + 5 + 8 + .. + 29$ είναι $S_{10} = \dfrac{[2\alpha_1 + 9\omega]10}{2}$

$= \dfrac{[2\cdot 2 + 9\cdot 3]10}{2} = 155$

Η εξίσωση $\Leftrightarrow \quad x + x + x + \ldots + x + 2 + 5 + 8 + \ldots + 29 = 165$

$10x + 155 = 165$

$10x = 10$

$x = 1$

16.

Να λυθεί η εξίσωση $1 + 7 + 13 + \ldots + x = 280$, όπου οι όροι του αθροίσματος αποτελούν αρ. πρόοδο.

Προτεινόμενη λύση

Είναι $\alpha_1 = 1$ και διαφορά $\omega = 6$

Αν ν είναι το πλήθος των όρων, τότε $S_\nu = 280$

$\dfrac{[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega]\nu}{2} = 280$

$\dfrac{[2\cdot 1 + (\nu - 1)\cdot 6]\nu}{2} = 280$

$(2 + 6\nu - 6)\nu = 560$

$(6\nu - 4)\nu = 560$

$6\nu^2 - 4\nu - 560 = 0$

$3\nu^2 - 2\nu - 280 = 0$

$\Delta = 4 + 12\cdot 280 = 4 + 3360 = 3364 \qquad \nu = \dfrac{2 \pm \sqrt{3364}}{6} = \dfrac{2 \pm 58}{6} = 10$ ή $\cancel{-\dfrac{56}{6}}$

Άρα $x = \alpha_{10} = \alpha_1 + 9\omega = 1 + 54 = 55$